

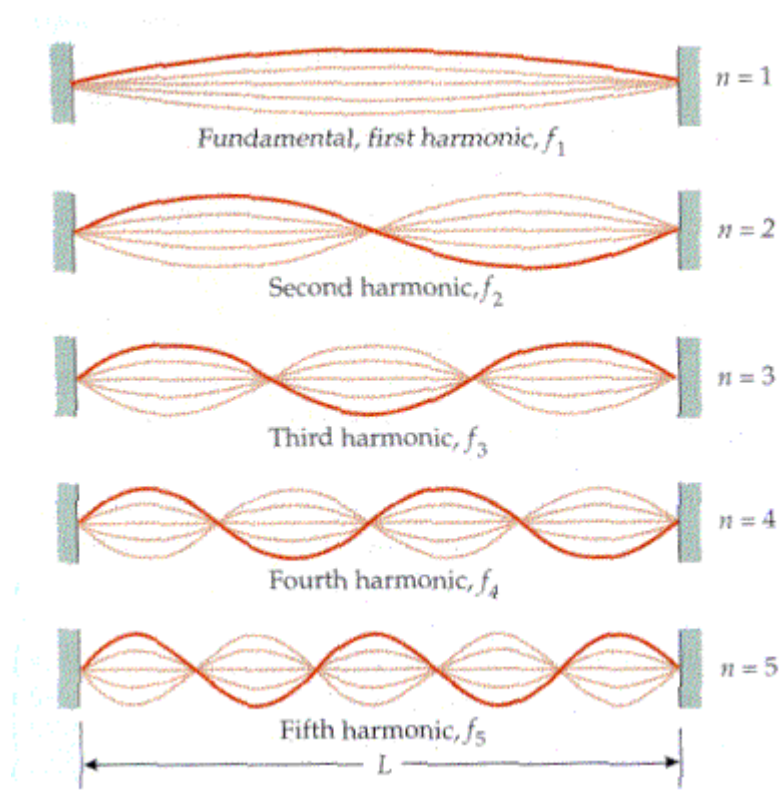


ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΙΤΟΝΑ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
& ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ:

ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΧΟΡΔΗ ΣΤΕΡΕΩΜΕΝΗ ΣΤΑ
ΑΚΡΑ ΤΗΣ



BAPH 2010

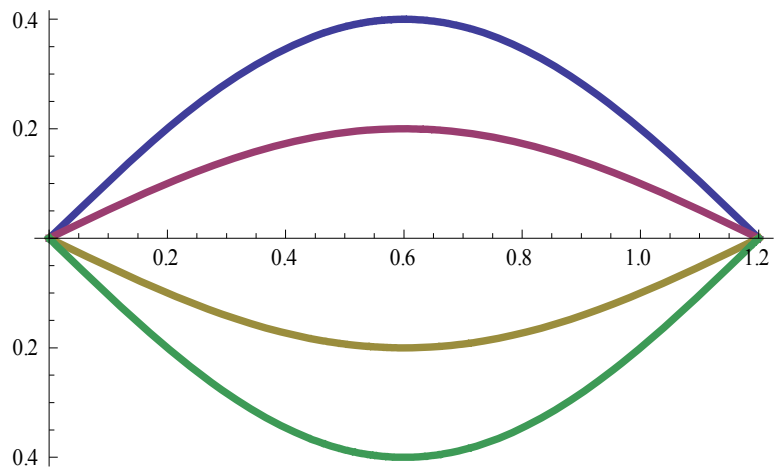
Κωνσταντίνος Μπίλιας &
Κωνσταντίνος Αρβανίτης, Φυσικοί.

Θεωρητικές Επισημάνσεις

Θεωρούμε μία χορδή μήκους L στερεωμένη και στα δύο άκρα της. Αν ένα κύμα ανακλάται στα άκρα της, τότε δημιουργούνται σε αυτή στάσιμα κύματα. Η χορδή όμως, μπορεί να ταλαντωθεί σχηματίζοντας μόνο μερικά σχήματα ταλάντωσης. Αυτές ονομάζονται ιδιομορφές ταλάντωσης. Σε κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί μια χαρακτηριστική συχνότητα, την οποία, ονομάζουμε *ιδιοσυχνότητα*.

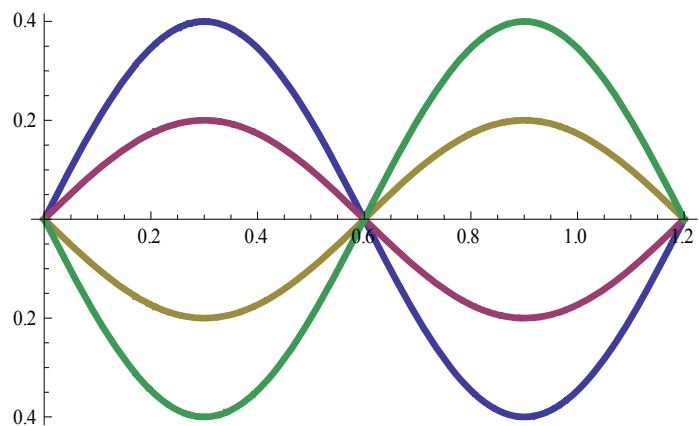
Τα δύο άκρα της χορδής αφού είναι στερεωμένα, είναι σίγουρα δεσμοί. Έστω ότι θέτουμε σε ταλάντωση το σημείο ακριβώς στη μέση της χορδής, οπότε το σημείο αυτό θα είναι κοιλία (Σχ.1α). Το μήκος της χορδής ισούται με το μισό μήκος κύματος λ (την απόσταση δηλαδή ανάμεσα σε δύο δεσμούς)

$$L = \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{ή} \quad \lambda_1 = 2L$$



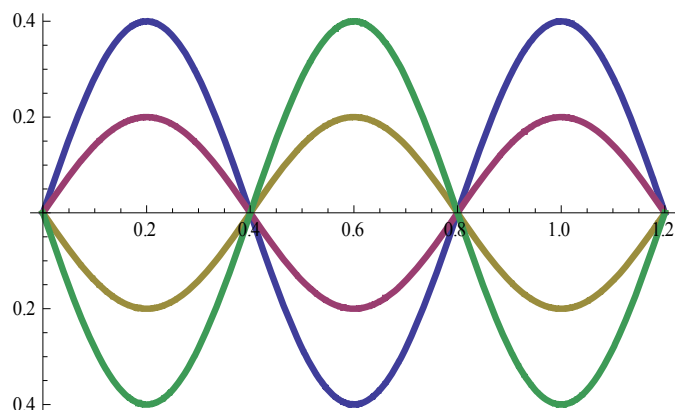
Σχ.1α. Πρώτη Αρμονική

Η επόμενη ιδιομορφή ταλάντωσης (Σχ 1β) θα έχει μήκος κύματος λ_2 και σε αυτήν το μήκος της χορδής ισούται με το μήκος, $\lambda_2 = L$, της ταλάντωσης.



Σχ.1β. Δεύτερη Αρμονική

Η τρίτη ιδιομορφή ταλάντωσης (Σχ 1γ) αντιστοιχεί στην περίπτωση που το μήκος της χορδής αντιστοιχεί σε τρία μισά μήκη κύματος, δηλαδή $\lambda_3 = 2L/3$.



Σχ.1γ. Τρίτη Αρμονική

Γενικεύοντας, μπορούμε να πούμε ότι τα μήκη των διάφορων ιδιομορφών ταλαντώσεων τεταμένων χορδών ικανοποιούν την σχέση

$$\lambda_{\kappa} = \frac{2L}{\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots) \quad (1) \quad \text{ή} \quad L = \kappa \frac{\lambda_{\kappa}}{2} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots)$$

όπου ο δείκτης κ αντιστοιχεί στην κ ιδιομορφή ταλάντωσης. Οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες υπολογίζονται, φυσικά, από την σχέση $f = u/\lambda$. Και αυτό γιατί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος u είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημάνουμε πως η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται μόνο από την τάση της χορδής και την γραμμική πυκνότητα μάζας της. Δηλαδή σε μία χορδή γραμμικής πυκνότητας μ , που είναι τεντωμένη με τάση F , η ταχύτητα διάδοσης ενός εγκάρσιου κύματος είναι :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (2)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1), βρίσκουμε ότι οι ιδιοσυχνότητες f_{κ} θα δίνονται από την σχέση :

$$f_{\kappa} = \frac{v}{\lambda_{\kappa}} \Rightarrow \boxed{f_{\kappa} = \kappa \frac{v}{2L}} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (2), (3), θα έχουμε :

$$f_{\kappa} = \frac{\kappa}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

Η χαμηλότερη ιδιοσυχνότητα (που αντιστοιχεί στο $\kappa=1$, αφού για $\kappa=0$ δεν υπάρχει κύμα) ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα, f_1 και ισούται με

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (5)$$

Οι υπόλοιπες ιδιοσυχνότητες ονομάζονται αρμονικές και είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους, δηλαδή $2f_1, 3f_1, \dots \kappa.o.k.$ Η θεμελιώδης συχνότητα μαζί με τις υπόλοιπες ιδιοσυχνότητες αποτελούν την λεγόμενη αρμονική σειρά. Η θεμελιώδης, η f_1 , είναι η πρώτη αρμονική. Η ιδιοσυχνότητα $f_2 = 2f_1$ η δεύτερη αρμονική, η ιδιοσυχνότητα $f_3 = 3f_1$ η τρίτη κ.ο.κ.

Φυσικά, στα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε και με ένα πιο...κομψό τρόπο. Για το αρχικό και το τελικό σημείο της χορδής θα είναι $x = 0$ και $x = L$. Θα πρέπει επίσης (αφού η χορδή είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της) η συνάρτηση $y(x,t)$ να μηδενίζεται στα σημεία αυτά, δηλαδή $y(0,t)=0$ και $y(L,t)=0$. Η εξίσωση του στάσιμου είναι $2A\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{T}$, οπότε, η συνθήκη $y(0,t)=0$ ικανοποιείται αυτόματα, αφού $\eta\mu\frac{2\pi x}{\lambda}=0$ στο $x=0$. Επομένως για να ικανοποιηθεί η δεύτερη συνθήκη $y(L,t)=0$ πρέπει $\eta\mu\frac{2\pi L}{\lambda}=0$. Όπως είναι γνωστό η συνθήκη αυτή ικανοποιείται αν η γωνία αυτή αν ισχύει:

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = \kappa\pi \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots)$$

δηλαδή

$$\lambda_{\kappa} = \frac{2L}{\kappa},$$

που είναι η (1).

Πειραματικό Μέρος.

Όργανα και υλικά

- Γεννήτρια συχνοτήτων
- Συσκευή παραγωγής ταλαντώσεων
- Data Logger LabQuest της Vernier
- Αισθητήρας δύναμης της Vernier
- Ορειχάλκινη βάση, ράβδος και σύνδεσμοι
- Νήμα (περίπου 1,5 m)
- Υπολογιστής.

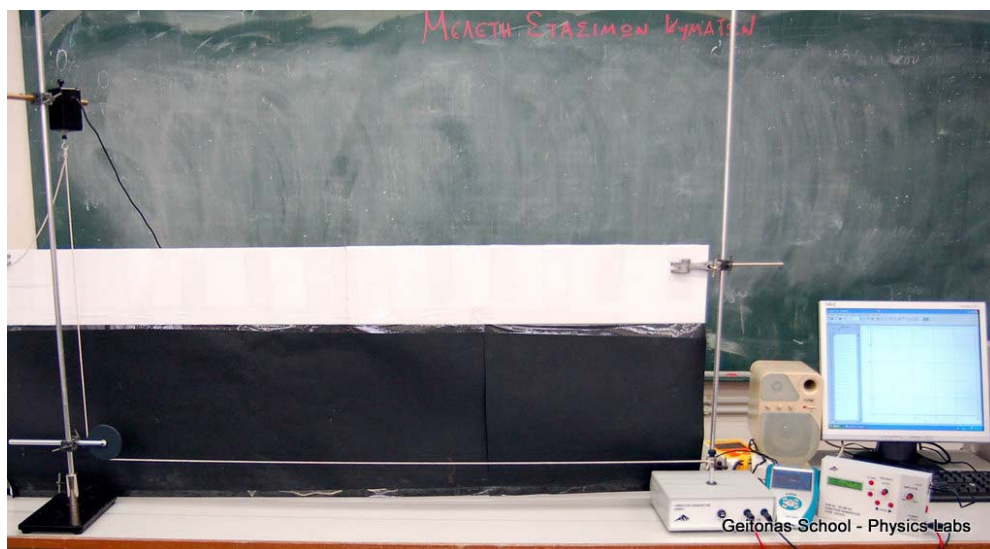


Μέρος Α.

Υπολογισμός αρμονικών συχνοτήτων και πειραματική επιβεβαίωση.

Συναρμολογού με την διάταξη της παρακάτω εικόνας.

Ρυθμίζουμε την τάση της χορδής στα 0,5 N αυξάνοντας ή μειώνοντας το ύψος του αισθητήρα δύναμης που παίζει και τον ρόλο

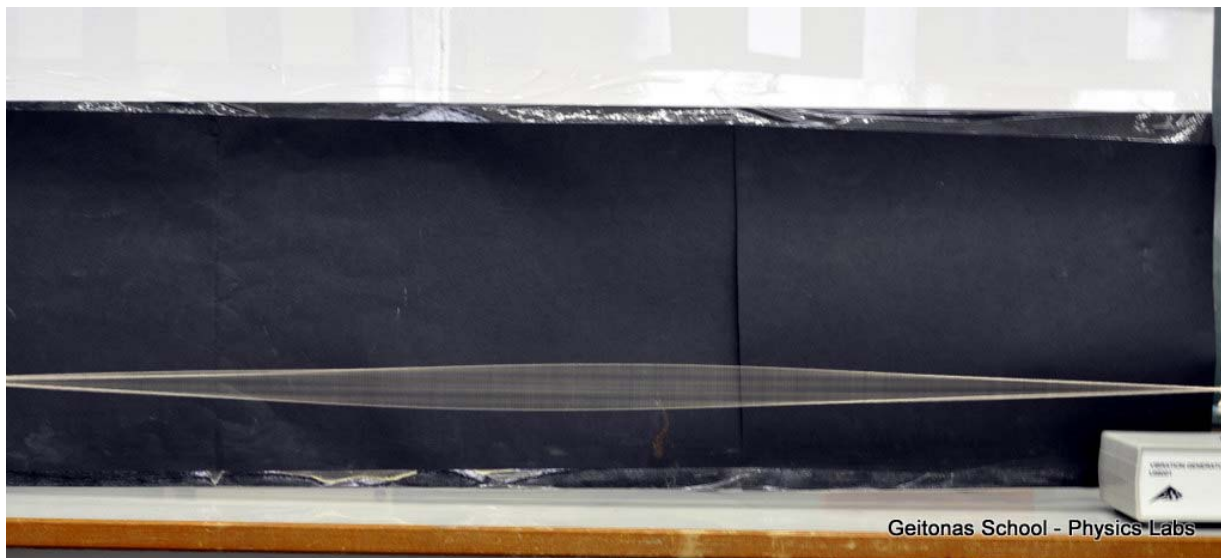


άγκιστρου. Φροντίζουμε να διατηρηθεί η τάση του νήματος σταθερή σε όλο το Α μέρος του πειράματος ώστε να παραμένει σταθερή η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή.

Θέτουμε σε ταλάντωση την συσκευή παραγωγής ταλαντώσεων. Επιλέγουμε την κατάλληλη συχνότητα στη γεννήτρια συχνοτήτων ώστε να πετύχουμε την πρώτη αρμονική (Εικ 3.) και την σημειώνουμε στον πίνακα Α. Υπολογίζουμε το μήκος κύματος σε αυτήν την ιδιομορφή σύμφωνα με την σχέση (1) και το σημειώνουμε και αυτό στον πίνακα Α. Τέλος υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπό την τάση των 0,5N.

ΠΙΝΑΚΑΣ Α

Μήκος Χορδής (m)	Συχνότητα Πρώτης Αρμονικής (Hz)	Μήκος Κύματος (m)	Ταχύτητα διάδοσης (m/s)
1,20	10	2,4	24

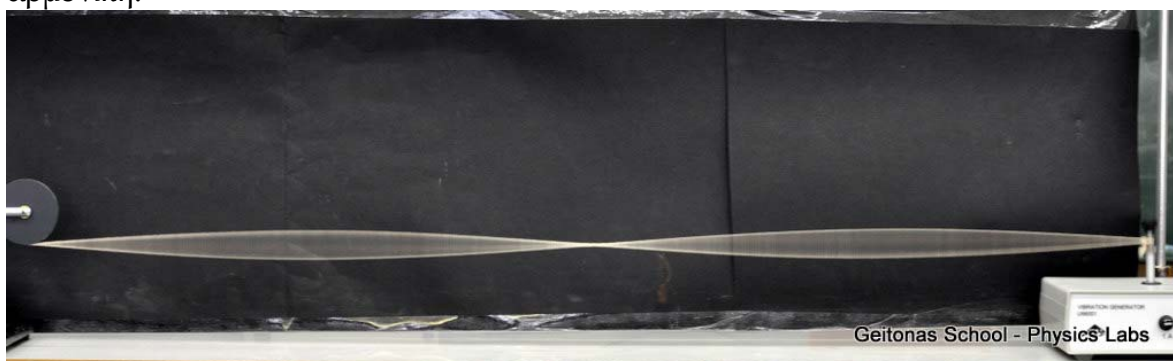


(Εικ. 3)

Τώρα, είμαστε σε θέση να προβλέψουμε θεωρητικά τις υπόλοιπες αρμονικές της αρμονικής σειράς. Από την σχέση $f_{\kappa} = \frac{\kappa}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ($\kappa=1,2,3,\dots$) είναι φανερό ότι, αφού μένει σταθερή η τάση και το μήκος, οι θεωρητικές τιμές των αρμονικών θα είναι :

Αρμονικές (Hz)
$f_2 = 20$
$f_3 = 30$
$f_4 = 40$

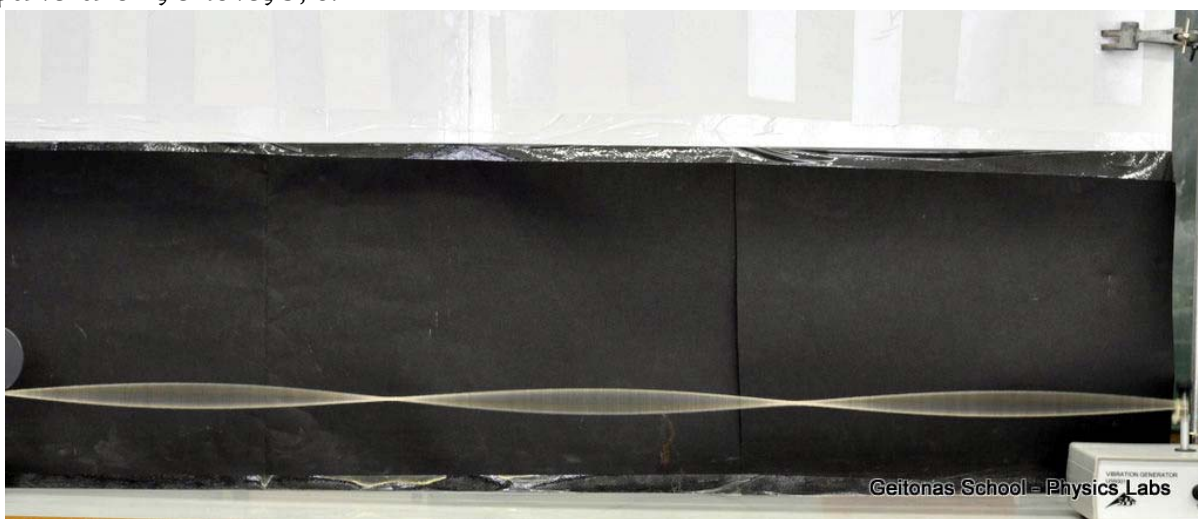
Αυξάνουμε την συχνότητα στην γεννήτρια συχνοτήτων στα 20Hz. Όπως φαίνεται στις εικόνα 4, η θεωρητική πρόβλεψη επιβεβαιώνεται. Στα 20Hz , εμφανίζεται η δεύτερη αρμονική.



(Εικ. 4)

Εκπαιδευτήρια Γείτονα. Στάσιμα κύματα σε χορδή στερεωμένη και στα δύο άκρα.

Ομοίως επιβεβαιώνεται η θεωρητική πρόβλεψη για την τρίτη αρμονική στα 30 Hz όπως φαίνεται στις εικόνες 5, 6.



(Εικ. 5)



(Εικ. 6)

Μέρος Β

Εξάρτηση της ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων από την τάση F της χορδής.

Κρατώντας το μήκος του νήματος σταθερό στα 1.2m ρυθμίζουμε αρχικά την τάση της χορδής στα 0,42N. Ρυθμίζουμε την συχνότητα της γεννήτριας κατάλληλα ώστε να εμφανίσουμε την πρώτη αρμονική. Σημειώνουμε τη συχνότητα στον πίνακα Β.

Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων και την σημειώνουμε και αυτήν στον πίνακα Β.

Στην συνέχεια αυξάνουμε την τάση στο νήματος στα 0,86 N. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία, υπολογίζουμε την νέα ταχύτητα διάδοσης και την καταγράφουμε στον πίνακα Γ.

ΠΙΝΑΚΑΣ Β

Τάση χορδής (N)	Συχνότητα f (Hz)	Αριθμός δεσμών	Μήκος κύματος (m)	Ταχύτητα διάδοσης (m/s)
0,42	8	2	2,4	19,2

ΠΙΝΑΚΑΣ Γ

Τάση χορδής (N)	Συχνότητα f (Hz)	Αριθμός δεσμών	Μήκος κύματος (m)	Ταχύτητα διάδοσης (m/s)
0,86	11	2	2,4	26,4

Παρατηρούμε πως ο διπλασιασμός της τάσης είχε ως αποτέλεσμα αύξηση της ταχύτητας.

Συγκεκριμένα, ενώ θεωρητικά προβλέπεται

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{\frac{F_1}{\mu}}{\frac{F_2}{\mu}}} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = \sqrt{\frac{0,43}{0,86}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,71,$$

Πειραματικά υπολογίζεται:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{19,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{26,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,73$$

Βιβλιογραφία

- Serway: «Physics for Scientists and Engineers» Τόμος III
- Τσούνης Βασίλειος «ΦΥΣΙΚΗ Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης»

Παρατήρηση

Στις θεωρητικές επισημάνσεις μελετήσαμε το μοντέλο μιας χορδής στερεωμένης στα δύο της άκρα, κάτι που σημαίνει πως τα δύο της άκρα είναι απαραίτητα δεσμοί. Στην πειραματική μας διάταξη το ένα άκρο είναι στερεωμένο, στο άλλο όμως βρίσκεται η πηγή παραγωγής ταλαντώσεων. Η διάταξη μας δίνει όμως αποτελέσματα πάρα πολύ κοντά στις θεωρητικές προβλέψεις. Ας δούμε γιατί.

Καθώς η πηγή πάλλεται, δημιουργούνται εγκάρσια κύματα, τα οποία μεταδίδονται στη χορδή και ανακλώνται στο ακινητοποιημένο άκρο της χορδής. Είδαμε όμως, πως η χορδή έχει ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης οι οποίες εξαρτώνται από την γραμμική πυκνότητα μάζας της, από την τάση της και από το μήκος της. Όταν η συχνότητα της πηγής γίνει ίση με μία από τις ιδιοσυχνότητες της χορδής, τότε δημιουργούνται στάσιμα κύματα και η χορδή πάλλεται με μέγιστο πλάτος.. *Το σταθερό άκρο της χορδής είναι, προφανώς, δεσμός ενώ το άλλο άκρο της που είναι στερεωμένο στην πηγή, είναι σχεδόν δεσμός, διότι το πλάτος ταλάντωσης της πηγής είναι πολύ μικρότερο από το πλάτος ταλάντωσης της χορδής.*