ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΓΕΙΤΟΝΑ

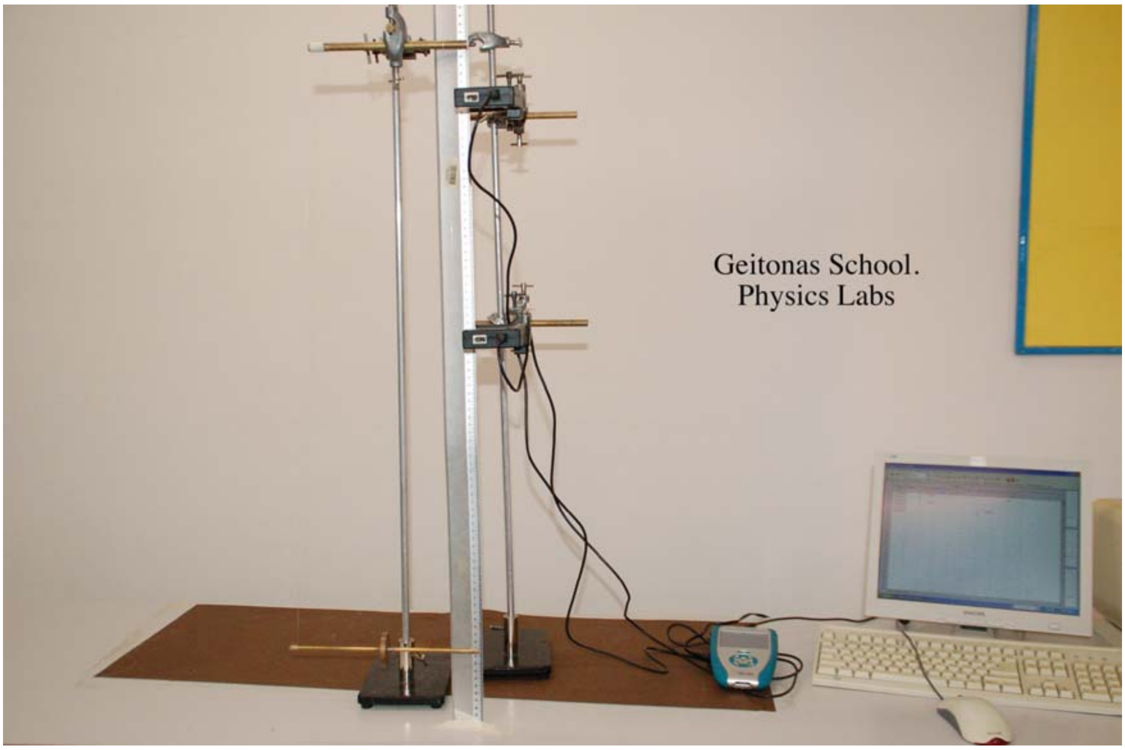
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

& ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ &ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ:

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΤΡΟΧΟΥ MAXWELL



ΒΑΡΗ 2012-2013

Μπίλιας Κων/νος
Φυσικός

Στόχοι

Σκοπός του πειράματος αυτού είναι η μελέτη της κίνησης του τροχού Maxwell και πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε :

- Τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας στη κίνηση του τροχού Maxwell.
- Τη μετατροπή της Δυναμικής Ενέργειας σε Περιστροφική και Μεταφορική Κινητική Ενέργεια.
- Τη ροπή αδράνειας του τροχού Maxwell.

Όργανα και Υλικά

- Τροχός Maxwell με νήμα μήκους 80 cm.
- Ορθοστάτες (x2) και βάσεις στήριξης (x2).
- Μεταλλικές ράβδοι 20 cm (x6) και μεταλλικοί σύνδεσμοι (x10).
- Σύστημα δύο φωτοπυλών και Data logger. (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά και χρονόμετρο με φωτοπύλες).
- Μεταλλικός κανόνας 1m.
- Ηλεκτρονικός ζυγός και βερνιέρος
- Για την επεργασία των δεδομένων θα χρειαστούν υπολογιστής τσέπης και χαρτί μιλιμετρέ.

Θεωρητικές Επισημάνσεις

Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας λέει ότι, η συνολική μηχανική ενέργεια ενός συστήματος παραμένει σταθερή εάν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (και παράγουν έργο) είναι συντηρητικές. Αυτό σημαίνει ότι, αν η κινητική ενέργεια ενός συστήματος συντηρητικού αυξάνεται (ή μειώνεται) κατά κάποια ποσότητα, η δυναμική ενέργεια πρέπει να μειωθεί (ή αυξηθεί) κατά το ίδιο ποσό.

$$\Delta K = -\Delta U \quad \text{(Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας)}$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια ενός συστήματος είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας:

$E_{Μηχ}$=K+ U

Η οποία είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης. Αν τώρα ένα σύστημα εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα, η κίνηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθετη, στροφική γύρω από το κέντρο μάζας του σώματος και μεταφορική του κέντρου μάζας του σώματος. Σε αυτή τη περίπτωση η συνολική κινητική του ενέργεια είναι το άθροισμα της μεταφορικής κινητικής του ενέργειας και της περιστροφικής του κινητικής ενέργειας:

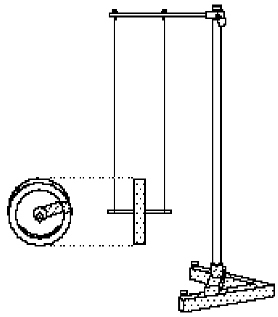
$K=K_t + K_r$

όπου

$$K_t = \frac{1}{2}mu^2, \quad \text{μεταφορική κινητική ενέργεια}$$

και

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \ , \quad \text{περιστροφική κινητική ενέργεια.}$$



Ο τροχός Maxwell που θα χρησιμοποιήσουμε αποτελείται από ένα συμπαγή τροχό και μία ράβδο (άξονας περιστροφής) όπως φαίνεται στην εικόνα (1). Ο άξονας περιστροφής μένει σε οριζόντια θέση στηριζόμενος από δύο κορδόνια δεμένα στην οριζόντια ράβδο και έχει την δυνατότητα να ανέρχεται και να κατέρχεται. Όταν ο τροχός ελευθερωθεί από την θέση ισορροπίας κατέρχεται και φθάνοντας στο κατώτερο σημείο ανέρχεται.

Η ολική μηχανική ενέργεια του τροχού θα είναι κάθε στιγμή:

$$E_{Μηχ} = U + K_t + K_r$$

δηλαδή

$$E_{Μηχ} = -mgh + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

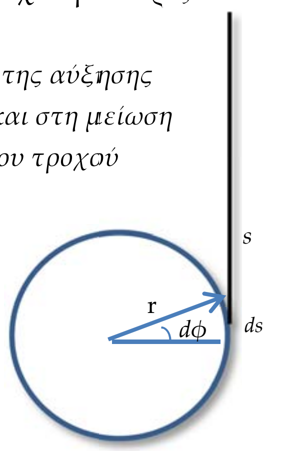
Όπου ω η γωνιακή ταχύτητα και **u** η μεταφορική ταχύτητα του δίσκου. Η σχέση που υπάρχει μεταξύ των ταχυτήτων ω και u βρίσκεται ως εξής:

$u = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$, όμως όπως είναι γνωστό, η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται ως

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, επομένως:

$$\omega = \frac{u}{r}$$

Σχέση μεταξύ της αύξησης στη γωνία dφ και στη μείωση του ύψους ds του τροχού



Όπου r η ακτίνα του άξονα του τροχού.

Έτσι η ολική ενέργεια του συστήματος γίνεται:

$$E_{M\eta\chi} = -mgh + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{u}{r}\right)^2$$

δηλαδή

$$E_{M\eta\chi} = -mgh + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)u^2$$

Καθώς όμως η μηχανική ενέργεια παραμένει συνεχώς σταθερή με τον χρόνο, η παραγώγιση στη παραπάνω εξίσωση μας δίνει:

$$\frac{dE_{M\eta\chi}}{dt} = -mg\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\frac{d}{dt}\left[u(t)^2\right]$$

Γνωρίζοντας όμως ότι η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή οπότε η χρονική της παράγωγος μηδενίζεται, η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στην διαφορική :

$$0 = -mgu(t) + \left(m + \frac{I}{r^2}\right)u(t)\frac{du(t)}{dt}.$$

Προχωρώντας στη λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα έχουμε:

$$mgu(t) = \left(m + \frac{I}{r^2}\right)u(t)\frac{du(t)}{dt}$$

διαιρώντας με $u(t)$

$$mg = \left(m + \frac{I}{r^2}\right)\frac{du(t)}{dt}$$

$$mgdt = \left(m + \frac{I}{r^2}\right)du(t)$$

$$du(t) = \frac{mg}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}dt$$

$$\int du(t) = \frac{mg}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}\int dt$$

Έτσι, το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος θα είναι:

$$u(t) = \frac{mg}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}t \quad \textbf{(1)}$$

Επιπλέον, η κατακόρυφη μετατόπιση θα βρεθεί από τον ορισμό της ταχύτητας. Αφού $u(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}$

Θα έχουμε:

$$dh(t) = u(t)dt$$
$$\int dh(t) = \int u(t)dt$$
$$h(t) = \left(\frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} \right) \int t dt$$

Δηλαδή:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} \right) t^2$$

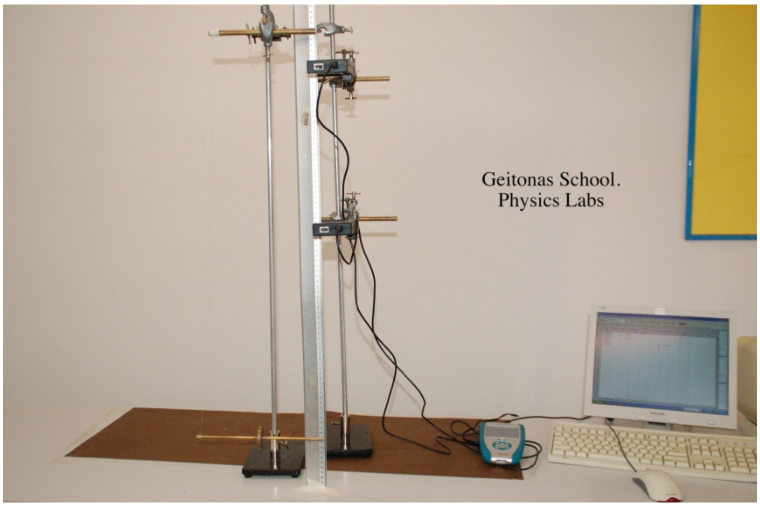
Ενώ λύνοντας ως προς την ροπή αδρανείας παίρνουμε:

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h(t)} - 1 \right) \qquad \textbf{(2)}$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό πως, μετρώντας τον χρόνο που κάνει το σύστημα να διανύσει μια συγκεκριμένη απόσταση, μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας του ενώ χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) μπορούμε να υπολογίζουμε την μεταφορική άρα και τη γωνιακή του ταχύτητα κάθε στιγμή.

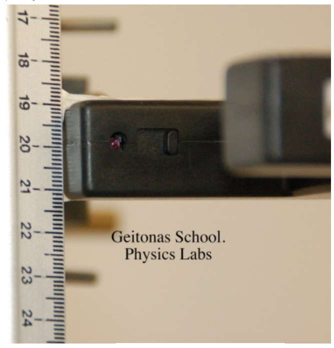
Πειραματική Διαδικασία

1. Συναρμολογούμε τη διάταξη της εικόνας (2). Τοποθετούμε τη πρώτη φωτοπύλη με τέτοιο τρόπο ώστε το «μάτι» της να βρίσκεται στην θέση 20cm του κανόνα (Εικόνα 3). Αυτή η φωτοπύλη θα παραμένει ακίνητη καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος.



Εικόνα 2

2. Τοποθετούμε τον τροχό Maxwell στη διάταξη με τέτοιο τρόπο ώστε τα νήματα να είναι ίσια και από τις δύο πλευρές και η <u>ανώτατη δυνατή θέση</u> του τροχού να βρίσκεται <u>**ελάχιστα**</u> πάνω από το «μάτι» της πρώτης φωτοπύλης



Εικόνα 3

3. Τοποθετούμε την δεύτερη φωτοπύλη στη θέση 35 cm (έτσι ώστε ο τροχός θα έχει διανύσει 15 cm από την μία φωτοπύλη στην άλλη). Η απόσταση θα μεταβληθεί από τα 15cm έως τα 50cm σε βήματα των 5cm.

4. Συνδέουμε τις φωτοπύλες στο data logger. (Εάν πρόκειται για το Vernier ανοίγουμε το πρόγραμμα Logger light .)

5. Τυλίγουμε τον τροχό και τον κρατούμε στην ανώτατη θέση του. Κατόπιν τον απελευθερώνουμε και καθώς περνά από τις 2 φωτοπύλες καταγράφονται 4 χρόνοι t_1, t_2, t_3, t_4 (είσοδος-έξοδος από την κάθε φωτοπύλη).

6. Αφαιρούμε από τον t_3 (=χρόνος εισόδου στη δεύτερη φωτοπύλη) τον t_1 (=χρόνος εισόδου στην πρώτη φωτοπύλη) και βρίσκουμε την χρονική διάρκεια που απαιτείται για να διανύσει ο τροχός την απόσταση h_1=15cm με καλή προσέγγιση.

7. Επαναλαμβάνοντας τα βήματα (5) και (6) για h μέχρι 50 cm συμπληρώνουμε τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα (1).

8. Υπολογίζουμε τη ροπή αδρανείας από τον τύπο :

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2h(t)} - 1\right)$$

για κάθε μέτρηση και κατόπιν υπολογίζουμε τη μέση τιμή της. Καταγράφουμε τις ροπές αδρανείας στην τρίτη στήλη του πίνακα (1).

9. Υπολογίζουμε τη μεταφορική και τη γωνιακή ταχύτητα από τις ακόλουθες εξισώσεις :

$$u(t) = \frac{mg}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}t \qquad \text{και} \quad \omega = \frac{u}{r}$$

και κατόπιν τις καταγράφουμε στις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα (1)

10. Σχεδιάζουμε ένα γράφημα h=f(t) καθώς και ένα γράφημα u=f(t) και σχολιάζουμε το αποτέλεσμα.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

11. Υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια για κάθε απόσταση και την καταγράφουμε στη δεύτερη στήλη του πίνακα (2)

$$U = -mgh$$

12. Υπολογίζουμε τη μεταφορική κινητική ενέργεια για κάθε απόσταση και την καταγράφουμε στη τρίτη στήλη του πίνακα (2).

$$K_t = \frac{1}{2}mu^2$$

13. Υπολογίζουμε τη περιστροφική κινητική ενέργεια για κάθε απόσταση και την καταγράφουμε στη τέταρτη στήλη του πίνακα (2).

$$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

14. Υπολογίζουμε τη συνολική κινητική ενέργεια για κάθε απόσταση και την καταγράφουμε στη πέμπτη στήλη του πίνακα (2).

15. Συγκρίνουμε τις τιμές της δυναμικής και της συνολικής κινητικής ενέργειας την ίδια χρονική στιγμή και σχολιάζουμε το αποτέλεσμα.
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

16. Συγκρίνουμε τις τιμές της μεταφορικής κινητικής ενέργειας και της περιστροφικής κινητικής ενέργειας την ίδια χρονική στιγμή και σχολιάζουμε το αποτέλεσμα.
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

17. Σχεδιάζουμε τα γραφήματα $U=f(t)$, $K_t=f(t)$, $K_r=f(t)$

18. Προτείνουμε έναν ακόμη πειραματικό τρόπο επαλήθευσης της ταχύτητας του τροχού στις διάφορες θέσεις του, και τον εκτελούμε για δύο θέσεις του τροχού. Σχολιάζουμε το αποτέλεσμα.
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ΠΙΝΑΚΑΣ (1)

No	Διάστημα h(m)	Χρόνος t(s)	Ροπή Αδρανείας I(Kgm²)	Μεταφορική Ταχ. u(m/s)	Γωνιακή Ταχύτητα ω (rad/s)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
		Iμ=			

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Χρόνος t(s)	Δυναμική Εν. U (J)	Κινητική Μετ. K_t (J)	Κινητική Περ. K_r (J)	Κινητική Ολική K (J)

Βιβλιογραφία: 1. PHYWE Laboratory Experiments, Phywe publications

2. Physics Lab Manual, Department of Physics, King Fahd University

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

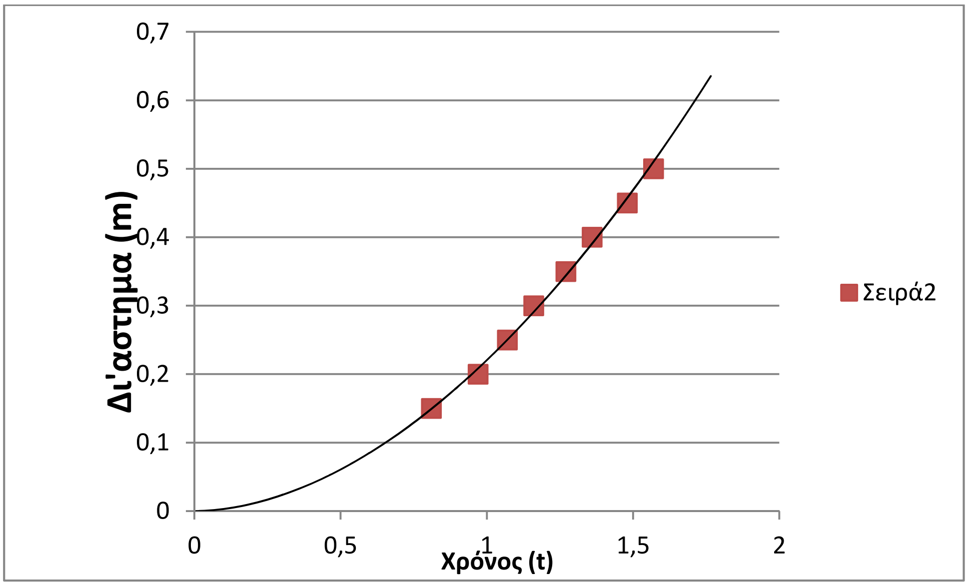
m=126,12 g

r=5mm

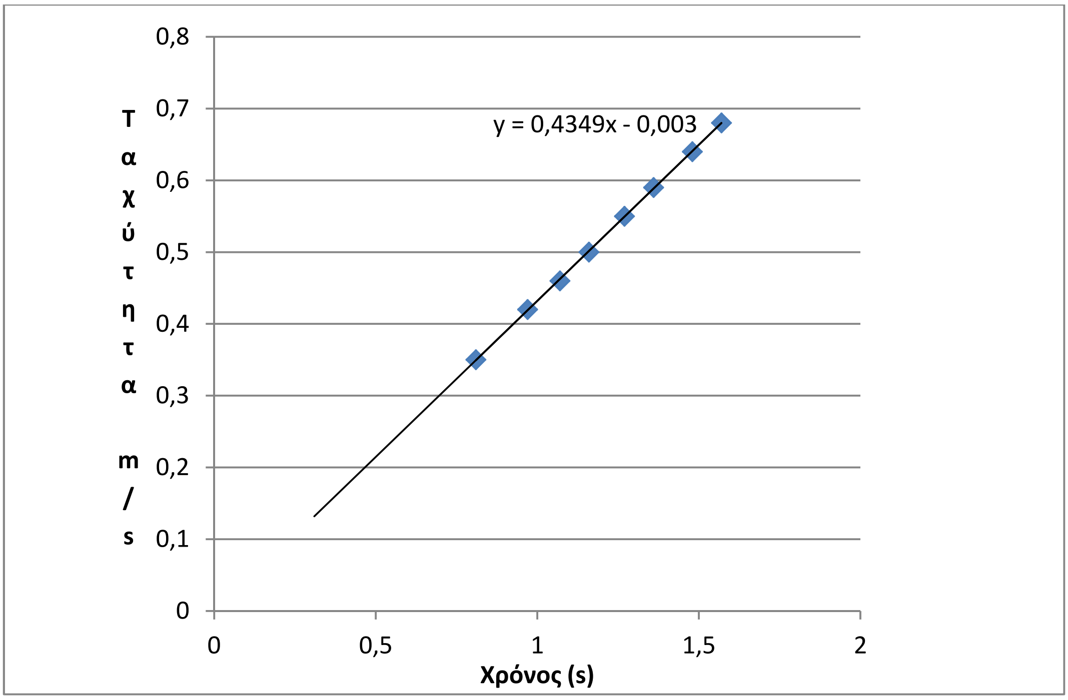
Α. Υπολογισμός Ροπής Αδρανείας και μελέτη της κίνησης

ΠΙΝΑΚΑΣ (1)

No	Διάστημα h(m)	Χρόνος t(s)	Ροπή Αδρανείας $I(Kgm^2)x10^{-4}$	Μεταφορική Ταχ. U(m/s)	Γωνιακή Ταχύτητα ω (rad/s)
1	0,15	0,81	0,65	0,35	70
2	0,20	0,97	0,69	0,42	84
3	0,25	1,07	0,67	0,46	93
4	0,30	1,16	0,66	0,5	100
5	0,35	1,27	0,68	0,55	110
6	0,40	1,36	0,68	0,59	118
7	0,45	1,48	0,72	0,64	128
8	0,50	1,57	0,73	0,68	136
		Ιμ=	**0,68**		



(Διάγραμμα Α)



(Διάγραμμα Β)

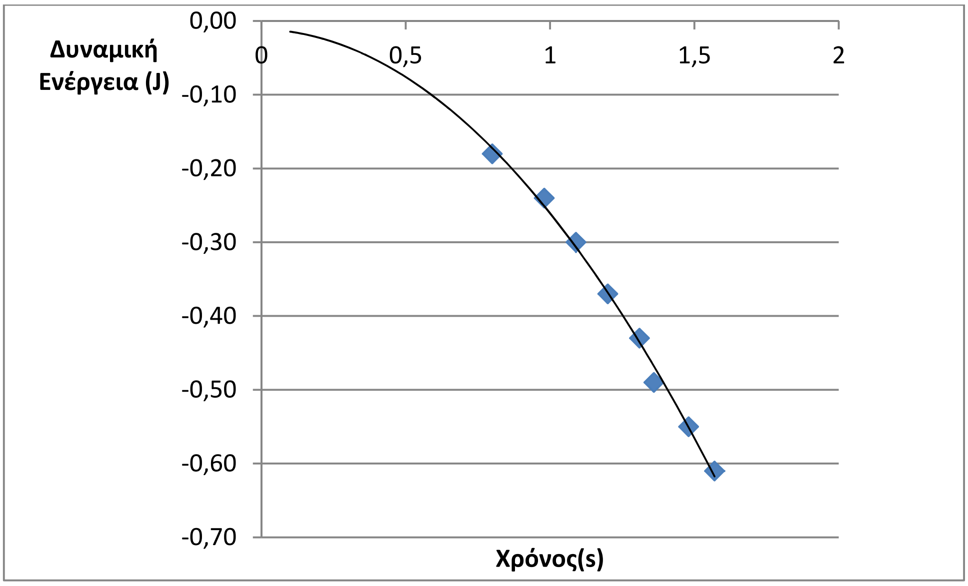
Είναι φανερό από τα διαγράμματα Α και Β πως το διάστημα ακολουθεί παραβολική συνάρτηση ενώ η ταχύτητα αυξάνει γραμμικά, κάτι που συμφωνεί και με τις εξισώσεις : $h(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{mg}{m+\frac{I}{r^2}}\right)t^2$, $u(t)=\frac{mg}{\left(m+\frac{I}{r^2}\right)}t$

Β. Μετατροπές Ενέργειας

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

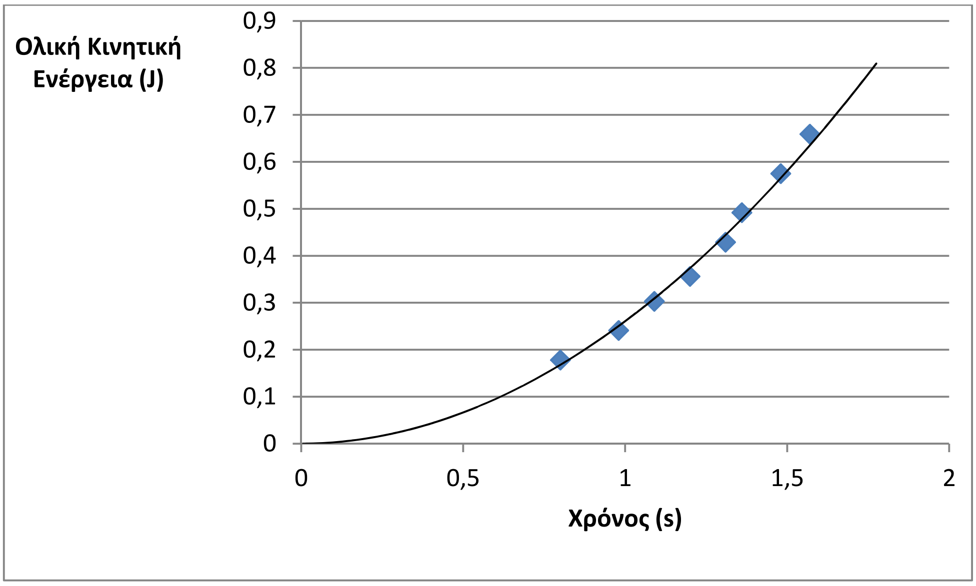
Χρόνος t(s)	Δυναμική Εν. U (J)	Κινητική Μετ. K_t (J)	Κινητική Περ. K_r (J)	Κινητική Ολική K (J)
0,81	**-0,18**	0,17	0,008	**0,178**
0,97	**-0,24**	0,23	0,011	**0,241**
1,07	**-0,30**	0,29	0,013	**0,303**
1,16	**-0,37**	0,34	0,016	**0,356**
1,27	**-0,43**	0,41	0,019	**0,429**
1,36	**-0,49**	0,47	0,022	**0,492**
1,48	**-0,55**	0,55	0,025	**0,575**
1,57	**-0,61**	0,63	0,029	**0,659**

Ο πίνακας (2) δείχνει την δυναμική ενέργεια και την κινητική ενέργεια. Σε όλη την διάρκεια της κίνησης έχουν σχεδόν την ίδια τιμή. *Αξίζει να παρατηρήσουμε πως το μεγαλύτερο μέρος της δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική λόγω περιστροφής.*

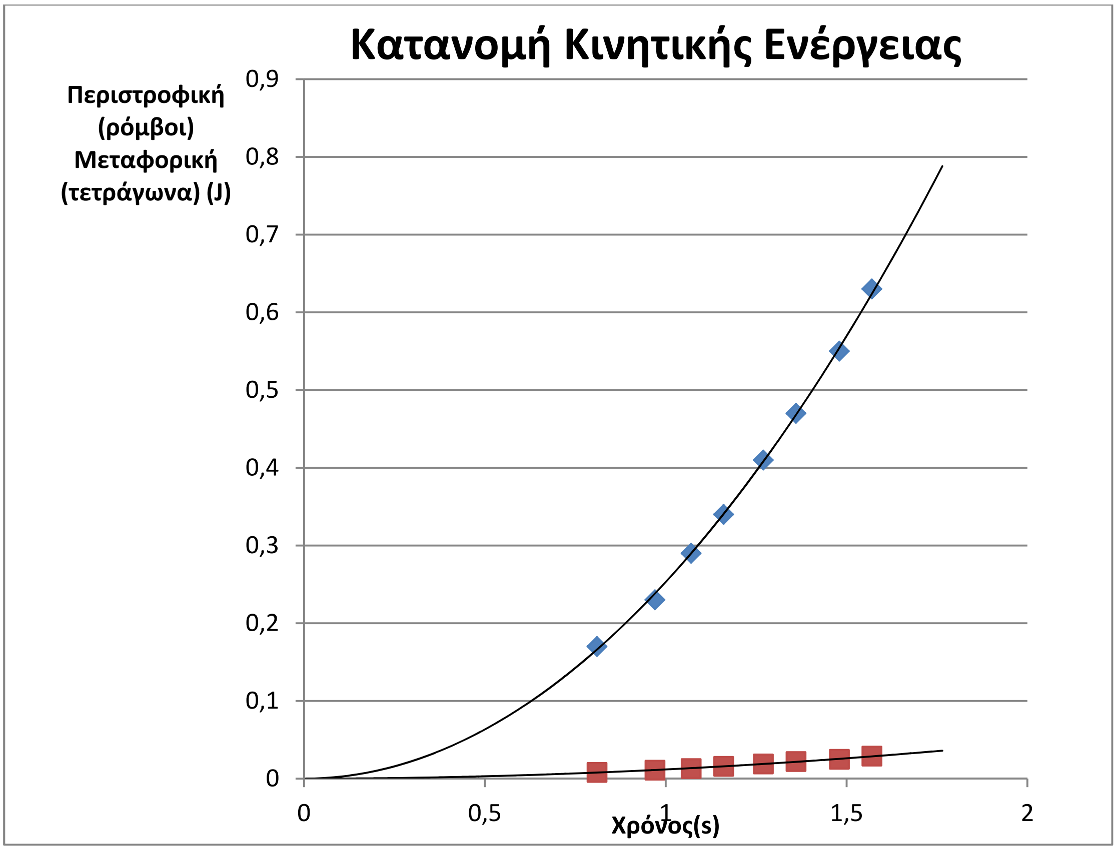


Διάγραμμα (Γ)

Δυναμική Ενέργεια (αρνητική) .



Διάγραμμα (Δ)



Διάγραμμα (Ε)

Περιστροφική Κινητική Ενέργεια (μπλέ ρόμβοι), Μεταφορική Κινητική Ενέργεια (κόκκινα τετράγωνα).