

Μελέτη της κίνησης σώματος πάνω σε πλάγιο επίπεδο

Περιγραφή - Θεωρητικές προβλέψεις - Σχεδιασμός

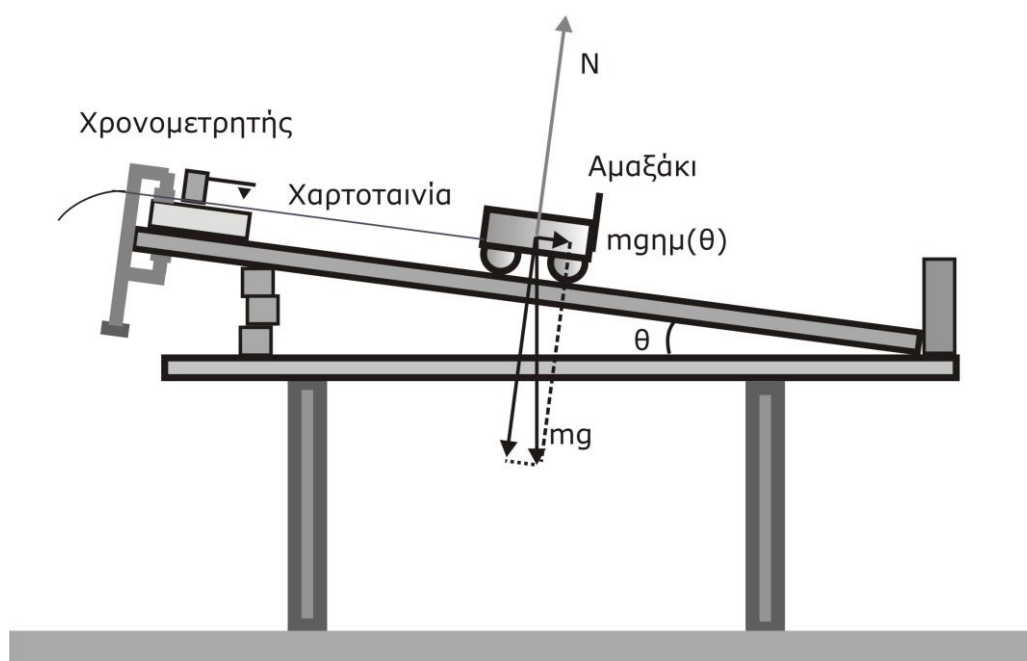
Βασικές έννοιες, σχέσεις και διαδικασίες

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς - 2ος νόμος του Newton - Ανάλυση δυνάμεων σε άξονες - Τριβή - Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση - Γραφική παράσταση γραμμικής συνάρτησης

Ένα αμαξάκι μάζας m , κινείται πάνω σε μια πλάγια σανίδα που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα 1.

Στο αμαξάκι δρουν οι δυνάμεις:

- 1) Το βάρος του $W = m \cdot g$ ($g=9,8m/s^2$)
- 2) Η κάθετη αντίδραση N της κεκλιμένης σανίδας.



Σχήμα 1

- 3) Η τριβή T (δεν φαίνεται στο σχήμα), που είναι παράλληλη στη σανίδα και αντίρροπη στην ταχύτητα του αμαξιού.

Το αμαξάκι κινείται κατά μήκος της κεκλιμένης σανίδας (άξονα x) κάτω από τη δράση της συνιστώσας $W_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\theta$ του βάρους του και της τριβής T . Σύμφωνα με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα, η επιτάχυνσή του a υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$m \cdot a = \sum F_x$$

ή:

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \eta\mu\theta - T \quad (1)$$

Διερεύνηση της σχέσης 1 - Θεωρητικές προβλέψεις

A) Σύμφωνα με τη σχέση 1, εφόσον η τριβή T είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου), τότε και η επιτάχυνση a του αμαξιού είναι σταθερή. Αφού η επιτάχυνση του αμαξιού είναι σταθερή, η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη: κάθε χρονική

στιγμή t , η θέση και η ταχύτητά του αμαξιού ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

$$v = v_0 + a \cdot t \quad (3)$$

όπου v_0 η ταχύτητα του αμαξιού τη στιγμή $t=0$.

Η εξίσωση (3) δηλώνει ότι η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο είναι μια ευθεία γραμμή. **Η πρόβλεψη αυτή μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά:** Αρκεί να μετρήσουμε την ταχύτητα του αμαξιού σε διάφορες χρονικές στιγμές και να ελέγξουμε αν τα αντίστοιχα πειραματικά σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.

Επιπλέον, σύμφωνα με την (3), η κλίση της πειραματικής ευθείας ισούται με την επιτάχυνση a του αμαξιού. Άρα, από την πειραματική ευθεία ταχύτητας-χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση a της κίνησης του αμαξιού.

B) Υποθέτουμε ότι η τριβή T είναι αμελητέα, σε σχέση με τη συνιστώσα $W_x = m \cdot g \cdot \eta\mu\theta$ του βάρους του αμαξιού. Τότε, από την (1) προκύπτει ότι η τιμή της επιτάχυνσης μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$a' = g \cdot \eta\mu\theta \quad (4)$$

όπου $g=9,8m/s^2$ και θ η γωνία κλίσης της πλάγιας σανίδας.

Η υπόθεσή μας ότι «η τριβή είναι αμελητέα», ευσταθεί εφόσον η τιμή a' είναι «πολύ κοντά» στην τιμή a που υπολογίζουμε από την κλίση της πειραματικής ευθείας ταχύτητας-χρόνου.

Για να έχουμε μια ποσοτική εκτίμηση της έννοιας «πολύ κοντινές τιμές», υπολογίζουμε το κλάσμα:

$$\sigma = \frac{|a - a'|}{a} \quad (5)$$

και το εκφράζουμε επί τοις εκατό. Αν το σ είναι μικρότερο ή ίσο από 5% θεωρούμε ότι στις συνθήκες του πειράματός μας, η υπόθεσή μας ευσταθεί. Αν είναι μεγαλύτερο, θεωρούμε ότι η τριβή δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα σε σχέση με τη συνιστώσα W_x του βάρους W .

Σε κάθε περίπτωση, η τριβή T μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (1).

Πειραματική διαδικασία

Απαιτούμενα όργανα

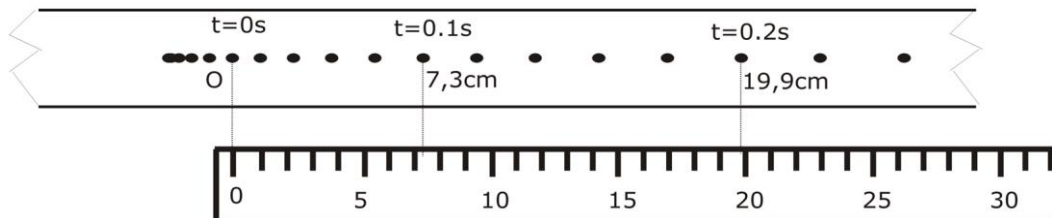
- 1) Ηλεκτρικός χρονομετρητής (ticker timer), χαρτοταινία, τροφοδοτικό AC 6-8V.
- 2) Αμαξάκι εργαστηρίου.
- 3) Χάρακας 30cm.
- 4) Φύλλο μιλιμετρέ

A) Πειραματική μελέτη της κίνησης του αμαξιού. Πειραματικό γράφημα ταχύτητας - χρόνου.

Μελετάμε πειραματικά την κίνηση του αμαξιού, με τη βοήθεια χρονομετρητή (ticker timer). Η κίνηση καταγράφεται στη χαρτοταινία του χρονομετρητή. Οι διαδοχικές θέσεις του αμαξιού αποτυπώνονται από το χρονομετρητή πάνω στη χαρτοταινία που διέρχεται απ' αυτόν, κάθε **0,02s**.

1. Κόλλησε στο αμαξάκι τη χαρτοταινία. Πέρασε το άλλο άκρο της κάτω από την ακίδα και το καρμπόν του χρονομετρητή.
2. Κράτησε με το χέρι σου το αμαξάκι, ώστε να παραμένει ακίνητο. Θέσε σε λειτουργία το χρονομετρητή και άφησε το αμαξάκι ελεύθερο. Άφησε το αμαξάκι να μετατοπιστεί περίπου 50cm και σταμάτησε το. Θέσε το χρονομετρητή εκτός λειτουργίας.
3. Αφαίρεσε τη χαρτοταινία από το αμαξάκι και κόλλησέ τη πάνω στον πάγκο, **όπως δείχνει το σχήμα 2**.

Άκρο της χαρτοταινίας που είχε κολληθεί στο αμαξάκι



Σχήμα 2

ΠΙΝΑΚΑΣ Α			
t s	x cm	Δx cm	v cm/s
0	0	-	-
0,1			
0,2			
0,3			
0,4			
0,5			
0,6			
0,7			

4. Αγνόησε τις πρώτες 10-15 κουκίδες και επέλεξε μια κουκίδα ως σημείο αναφοράς (O) (αρχή μέτρησης του χρόνου ($t=0$) και της θέσης ($x=0$)). Πάνω στη χαρτοταινία σημείωσε τους χρόνους $t=0, 0,1s, 0,2s... 0,7s$. Στους χρόνους αυτούς, μέτρησε με το χάρακα τη **θέση x** του αμαξιού **ως προς το σημείο αναφοράς (O)** και σημείωσέ την πάνω στη χαρτοταινία (σχήμα 2). Συμπλήρωσε τη δεύτερη στήλη του πίνακα Α.
5. Υπολόγισε την ταχύτητα του αμαξιού κατά τις χρονικές στιγμές $0,1, 0,2... \text{ έως και } 0,7s$. Η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται ως το πηλίκο της μετατόπισης του κινητού από τη θέση που βρισκόταν την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή έως τη θέση που βρίσκεται την αμέσως επόμενη, προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Δηλαδή:

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

Όπου $v(t)$ είναι η ταχύτητα του κινητού τις χρονικές στιγμές $t=0,1s, 0,2s, 0,3s... 0,6s$, και $\Delta t=0,1s$

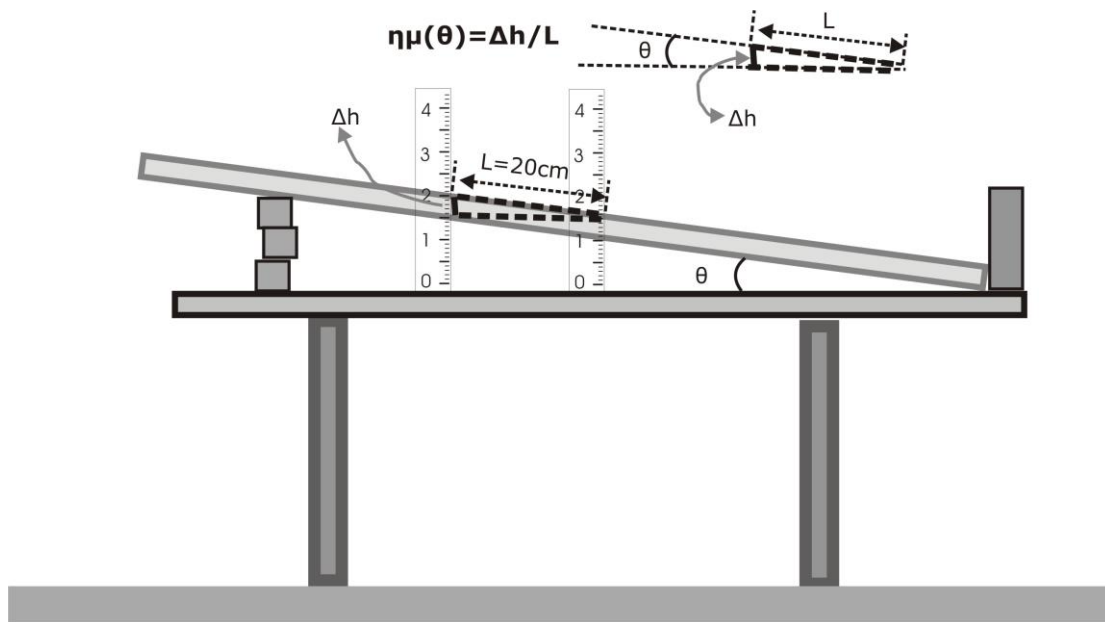
Για παράδειγμα, έστω ότι τις χρονικές στιγμές $t=0,3, t=0,4s$ και $t=0,5s$, το αμαξάκι βρισκόταν αντίστοιχα, στις θέσεις: $x(0,3)=5,4cm$, $x(0,4)=9,35cm$ και $x(0,5)=14,4cm$. Τότε η ταχύτητά του τη στιγμή $t=0,4s$ υπολογίζεται ως εξής:

$$v(0,4) = \frac{x(0,5) - x(0,3)}{2 \cdot 0,1} = \frac{14,4 - 5,4}{0,2} cm/s = 45,0cm/s$$

Συμπλήρωσε την τέταρτη στήλη του πίνακα Α με τις τιμές της ταχύτητας του αμαξιού, που υπολόγισες.

6. Στο φύλλο μιλιμετρέ, σχεδίασε άξονες ταχύτητας v – χρόνου t και τοποθέτησε τα πειραματικά σημεία. Έλεγξε αν τα πειραματικά σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, όπως προβλέπει η θεωρία. Σχεδίασε την ευθεία που διέρχεται όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο σύνολο το σημείων.
7. Από την πειραματική ευθεία υπολόγισε:
- την ταχύτητα v_0 του αμαξιού τη χρονική στιγμή $t=0$ (αρχική ταχύτητα)
 - την κλίση της ευθείας που σχεδίασες και απ' αυτήν, την επιτάχυνση a με την οποία κινείται το αμαξάκι.

8. Με βάση τις αριθμητικές τιμές της αρχικής ταχύτητας και της επιτάχυνσης του αμαξιού, γράψε: α) την αναλυτική έκφραση της ταχύτητάς του v ως συνάρτηση του χρόνου t και β) τη θέση του x , ως συνάρτηση του χρόνου t . Από τη συνάρτηση $x(t)$ υπολόγισε πού βρισκόταν το αμαξάκι τη στιγμή $t=0,65s$. Στη συνέχεια, έλεγξε την πρόβλεψή σου μετρώντας τη θέση του αμαξιού την ίδια χρονική στιγμή πάνω στη χαρτοταινία. Συμφωνεί ο υπολογισμός με τη μέτρηση; **(ΝΑΙ-ΟΧΙ)**



Σχήμα 3

B) Πειραματικός υπολογισμός της τριβής T

Ελέγχουμε πειραματικά αν η τριβή έχει σημαντική τιμή σε σχέση με τη συνιστώσα W_x του βάρους W του αμαξιού και προχωράμε στον πειραματικό υπολογισμό της

9. Υπολόγισε την τιμή του a σε m/s^2 , με προσέγγιση δύο σημαντικών ψηφίων.

$a = \underline{\hspace{2cm}} m/s^2$

10. Με το υποδεκάμετρο και με τη βοήθεια του σχήματος 3 μέτρησε το ημίτονο της γωνίας κλίσης της κεκλιμένης σανίδας. Στη συνέχεια εφάρμοσε τη σχέση (4) και υπολόγισε την επιτάχυνση a' του αμαξιού ($g=9,8m/s^2$). Υπολόγισε το λόγο σ (σχέση 5) επί τοις εκατό. Ευσταθεί η υπόθεση ότι η τριβή είναι αμελητέα; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.

11. Αν το σ είναι μεγαλύτερο του 5%, υπολόγισε την τριβή που ασκείται στο αμαξάκι (εξίσωση 1).

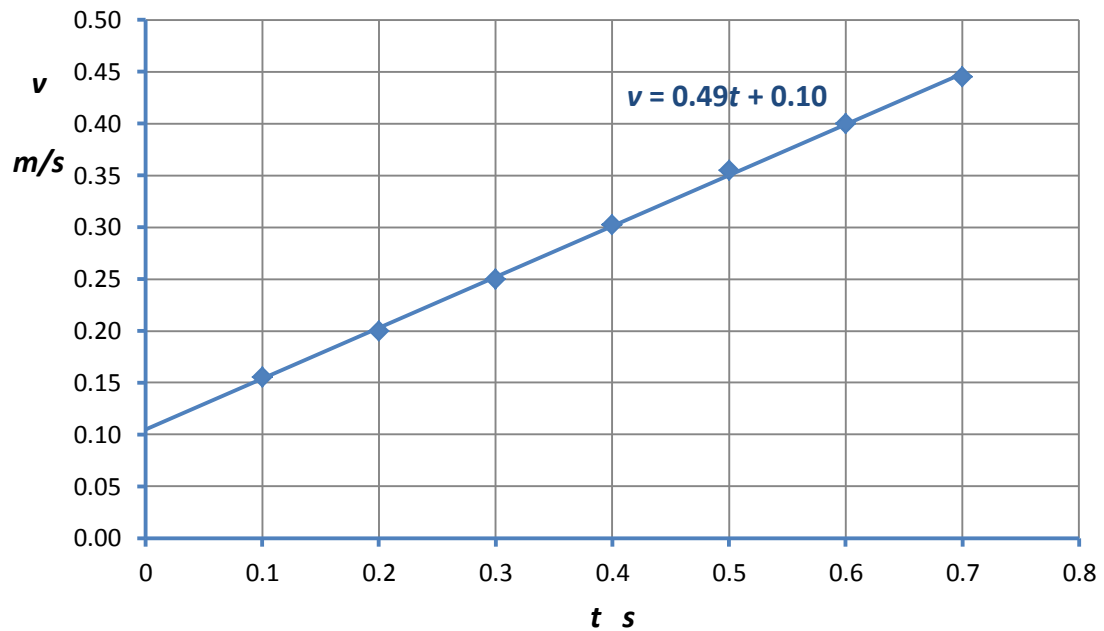
Βαθμολόγηση της Άσκησης

Έγινε η κίνηση κατά μήκος της σανίδας;	0 ή 1 ή 2	
Έπεσε το αμαξάκι στο έδαφος;	-10	
Χρειάστηκε δεύτερη χαρτοταινία;	-2	
Επελέγη σωστά η αρχή μέτρησης της θέσης και του χρόνου;	0 ή 1 ή 2	
Επελέγησαν σωστά τα σημεία της χαρτοταινίας που αντιστοιχούν στους χρόνους 0, 0,1s, ... 0,7s	0 έως 8 (1μ ανά σημείο)	
Έγινε σωστά η μέτρηση των θέσεων του αμαξιού στους αντίστοιχους χρόνους;	0 έως 16 (2μ ανά σημείο)	
Συμπληρώθηκε σωστά η 2η στήλη του πίνακα A;	0 έως 4 (0,5μ ανά κελί)	
Συμπληρώθηκε σωστά η 3η στήλη του πίνακα A;	0 έως 6 (1μ ανά κελί)	
Συμπληρώθηκε σωστά η 4η στήλη του πίνακα A;	0 έως 16 (2μ ανά κελί)	
Κλίμακα και μονάδες του άξονα t του πειραματικού γραφήματος.	0 ή 1 ή 2	
Κλίμακα και μονάδες του άξονα v του πειραματικού γραφήματος.	0 ή 2 ή 4	
Τοποθέτηση των πειραματικών σημείων στο γράφημα.	0 έως 12 (2μ ανά σημείο)	
Σχεδιασμός της πειραματικής ευθείας	0 ή 1 ή 2 ή 3	
Υπολογισμός της αρχικής ταχύτητας	0 ή 5	
Υπολογισμός της κλίσης της ευθείας και της επιτάχυνσης a του αμαξιού	0 ή 2 ή 4 ή 6	
Γραφή της εξίσωσης της ταχύτητας	0 ή 2 ή 4	
Γραφή της εξίσωσης της θέσης	0 ή 2 ή 4	
Υπολογισμός της θέσης τη στιγμή $t=0,65$ από την εξίσωση	0 έως 5	
Μέτρηση της θέσης τη στιγμή $t=0,65$ από τη χαρτοταινία	0 έως 3	
Συμφωνεί η μέτρηση με τον υπολογισμό;	απόκλιση < 5%: 5μ απόκλιση > 5%: 0	
Μέτρηση του ημιτόνου της κλίσης της κεκλιμένης σανίδας	0 ή 2 ή 6μ	
Υπολογισμός της επιτάχυνσης a'	0 ή 1 ή 2μ	
Υπολογισμός του σ επί τοις εκατό	0 ή 2 ή 4μ	
Αιτιολόγηση της προσέγγισης και υπολογισμός της τριβής	0 έως 6μ	
Σύνολο=Μονάδεςx100/125	max=125	

Ενδεικτικές μετρήσεις και υπολογισμοί

t s	x cm	v m/s	Γωνία θ πλάγιου επιπέδου (rad)
0	0		0.075
0.1	1.35	0.16	Επιτάχυνση, σύμφωνα με το γράφημα
0.2	3.1	0.20	$\alpha=0.49\text{m/s}^2$
0.3	5.35	0.25	
0.4	8.1	0.30	$a'=g\sin\theta$
0.5	11.4	0.36	0.74
0.6	15.2	0.40	
0.7	19.4	0.45	$\sigma= \alpha-\alpha' /\alpha$
0.8	24.1		0.50

Τριβή T (N)
0.22



k_pm